

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی توزیع آب براساس شکل ماتریسی روش شیب و مقایسه‌ی آن با سایر روشهای مرسوم

مجید حیدری^{۱*}، سحرالسادات رضویان^۲، سیدمعزالدین نبوی همدانی^۳

تاریخ دریافت: ۹۱/۸/۱۵ تاریخ پذیرش: ۹۳/۴/۱۵

چکیده

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی آب شامل تعیین مقادیر بده توزیع شده در هر لوله و بار آبی در گره‌های شبکه می‌باشد. روش شیب با بهره‌گیری از جبر ماتریسها و بسط معادلات به کمک گروه تیلور، نتایج حل عددی معادلات پیوستگی جریان را در گره‌ها، و افت کارمایه را در حلقه‌ها بطور همزمان ارائه می‌نماید. هدف از انجام این تحقیق تحلیل هیدرولیکی شبکه‌ی توزیع آب براساس شکل ماتریسی روش شیب و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن براساس شاخصهای آماری: نش - ساتکلیف، ضریب مجموع باقی‌مانده، ضریب تعیین و مجذور میانگین مربع خطا با کاربرد روشهای هاردی کراس، نیوتن-رافسون و نظریه‌ی خطی می‌باشد. مقادیر شاخصهای آماری به ترتیب برابر با $CRM=0$ ، $NS=I$ ، $R^2=1$ و $RMSE=0$ و نزدیک به مقدار آرمانی آنها به دست آمدند. بر همین اساس، می‌توان کارایی روش شیب را در محاسبه‌ی بار آبی گره‌های مجهول، و نیز بده‌ی عبوری از لوله‌ها به خوبی اثبات کرد. این نتایج نشان دادند که روش شیب دارای خروجیهای دقیق و قابل اطمینانی می‌باشد. این قابلیت امکان طراحی و تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی گسترده را آسانتر می‌نماید.

واژه‌های کلیدی: تحلیل هیدرولیکی، شبکه‌ی توزیع آب و روش شیب.

^۱ - عضو هیات علمی گروه مهندسی آب دانشکده کشاورزی دانشگاه بوعلی سینا

^۲ - دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته آبیاری و زهکشی گروه مهندسی آب دانشکده کشاورزی دانشگاه بوعلی سینا

^۳ - دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

* - نویسنده مسوول مقاله: Mheydari_ir@yahoo.com

مقدمه

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی توزیع آب، به‌منظور تعیین بار آبی در نقاط مختلف و بده لوله‌ها صورت می‌پذیرد. با توجه به تغییرات مصرف در شبکه تحت تأثیر نوسانهای لحظه‌ای، روزانه، هفتگی، ماهانه و فصلی، تغییرات پیوسته‌ای در بار آبی و بدهی لوله‌ها ایجاد می‌شود (بابازاده و بهشتی، ۱۳۸۹)، بنابراین، جریان ورودی و خروجی گرهمها نیز ثابت نبوده و با زمان تغییر می‌نماید، اما در عمل، معمولا شبکه‌های را در حالت ماندگار^۱ تحلیل می‌کنند، که در آن مصرف گرهمها ثابت در نظر گرفته می‌شود. تحلیل در حالت ماندگار را تحلیل پایایی^۲ می‌نامند. در حالیکه تحلیل پویایی^۳، نوسانهای زمانی مصرف بررسی می‌شوند. اندازه‌ی جریان ورودی به شبکه به اندازه‌ی مصرف بستگی دارد. در تحلیل پایایی، اندازه‌ی مصرف در طول زمان ثابت در نظر گرفته شده و میزان آبرسانی به شبکه ماندگار می‌باشد. شبیه‌های شبیه‌سازی هیدرولیکی شبکه‌های، ابزار توانمندی می‌باشند که برای تعیین مشخصات هیدرولیکی سامانه‌ی توزیع آب نظیر فشار در گرهمها، توزیع جریان در لوله و ... به کار می‌روند (تائبی و چمنی، ۱۳۸۴).

از تحلیل هیدرولیکی شبکه‌ی توزیع آب برای بررسی عملکرد هیدرولیکی شبکه‌هایی جدید، بازبینی روش طراحی و بهینه‌سازی شبکه‌هایی موجود استفاده می‌شود. تحلیل شبکه‌ی توزیع آب شامل: تعیین مقادیر بدهی توزیع شده در هر لوله و ارتفاع فشاری^۴ در گرهمهای شبکه است، بطوری‌که روابط پیوستگی جریان را در گرهمها و افت کارمایه در شبکه ارضا نمایند. پس از نوشتن معادلات فوق در هر شبکه، تمام یا برخی معادلات به صورت غیرخطی ظاهر می‌گردند، که هیچ روش مستقیمی برای حل آنها وجود ندارد، لذا، باید از روشهای تکراری برای حل این مجموعه معادلات استفاده کرد. بدیهی است که در هر تکرار حل معادلات تقریبی بوده و نیاز به تصحیح دارد؛ از این رو، تکرار محاسبات تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه خواهد یافت (تائبی و چمنی، ۱۳۸۴). سه روش تکراری

مرسوم برای حل معادلات و تحلیل شبکه‌هایی توزیع آب وجود دارند که به ترتیب زمان ارائه عبارتند از:

- ۱- روش‌های کراس^۵
- ۲- روش نیوتن-رافسون^۶
- ۳- روش نظریه‌ی خطی^۷ لیندل (۲۰۰۶).

هایردی کراس در سال ۱۹۳۶ میلادی روشی تکراری را برای تحلیل شبکه‌هایی حلقوی توزیع آب با جریانهای ورودی و خروجی مشخص پیشنهاد نمود (بابازاده و بهشتی، ۱۳۸۹). این روش براساس معادله‌های پیوستگی جریان و افت فشار و با در نظر گرفتن فرضیه‌های ساده‌ای حل می‌شود، اما مشکل عمده‌ی آن مربوط به چگونگی همگرایی محاسبات می‌باشد. همگرایی این روش بسیار کند بوده و این مسأله منجر به تکرار زیاد مراحل محاسباتی و حتی واگرایی محاسبات می‌گردد (بی هیو و گوپتا، ۲۰۰۶). شیوه‌ی نیوتن-رافسون یک روش عددی قدرتمند برای حل سامانه‌ی معادلات غیرخطی است که در سال ۱۹۶۳ مطرح شد. در این روش جملات غیرخطی در گروه تیلور بسط داده شده، و فقط جملات خطی حفظ می‌شوند؛ در واقع، روش نیوتن-رافسون معادلات غیرخطی را از طریق مشتق‌گیری جزئی خطی کرده و سعی در حل همزمان تمام معادلات دارد (بابازاده و بهشتی، ۱۳۸۹)؛ تائبی و چمنی، ۱۳۸۴). روش نظریه‌ی خطی به‌وسیله‌ی وود و چارلز (۱۹۷۲) مطرح گردید. در این روش، کل شبکه با هم مورد تحلیل قرار گرفته و همانند روش نیوتن-رافسون روابط پیوستگی جریان در گرهمها خطی، و روابط افت فشار در حلقه‌ها غیرخطی می‌باشند. در این روش، روابط کارمایه حلقه اصلاح می‌شوند تا برای بده‌های معلوم قبلی به صورت خطی درآمده و به صورت تکراری حل شوند. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که جوابهای به‌دست آمده به محدوده‌های مجاز نزدیک شوند. این روش برای حل معادلات غیرخطی شبکه‌ی توزیع آب با ادغام بخشی از جملات غیرخطی، ثابت مقاومت^۸ لوله، این معادلات را خطی کرده و حل می‌کنند (بابازاده و بهشتی، ۱۳۸۹).

⁵ - hardy cross

⁶ - Newton-Raphson

⁷ - linear theory method

⁸ - resistance constant

¹ - steady state

² - static analysis

³ - dynamic analysis

⁴ - piezometric head

مقدار تابع هدف کمتری را نسبت به سایر روشهای مرسوم خواهد داشت.

رضویان و همکاران (۱۳۹۱ ب) در تحقیق دیگری به مقایسه‌ی روش شیب و الگوریتم فراابتکاری تبرید تدریجی در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی توزیع آب شهری پرداختند. نتایج نشان دادند که الگوریتم فراابتکاری تبرید تدریجی توانایی ارضای همزمان معادلات بقای جرم و کارمایه را همانند روش شیب دارد. موسویان و همکاران (۱۳۹۱) به منظور حل سریعتر دستگاههای خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها از روش پیش شرط شیب استفاده نمودند. نتایج کاربرد روش چند شبکه‌ای *AMG*-*CG* ایشان نشان دهنده‌ی قابلیت‌های این روش در تحلیل شبکه‌هایی گسترده می‌باشد. موسویان و جعفرزاده (۲۰۱۴) برای اثبات کارایی روش شیب، به بررسی مثالهای متعددی از شبکه‌هایی چند حلقه‌های پرداختند. در این تحقیق ایشان برای حل معادلات شبکه از روش شیب سراگروه استفاده نمودند. روش *SCE* پیشنهادی آنها قابلیت رقابت را با سایر روشهای بهینه‌سازی با دقت بالایی در تعیین فراسنجهای شبکه دارد. هدف از انجام این تحقیق تحلیل هیدرولیکی شبکه‌ی توزیع آب براساس شکل ماتریسی روش شیب و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن بر اساس شاخصهای آماری: *NS*، *CRM*، R^2 و *RMSE* با روشهای: هاردی کراس، نیوتن-رافسون و نظریه خطی می‌باشد.

مواد و روشها

در این تحقیق ابتدا روابط هیدرولیکی بین فراسنجهای شبکه بیان گردیده، سپس مبانی و انگاره‌ی روش شیب به عنوان یکی از روشهای تکرار برای حل معادلات شبکه‌ی توزیع آب شرح داده می‌شود. سپس با طرح یک مسأله از شبکه‌ی لوله، به حل آن از طریق روش شیب می‌پردازیم. به منظور حل مسأله‌ی مورد نظر، و دستیابی به محاسبات عددی مطمئن، از نرم‌افزار *MATLAB* که دارای این قابلیت، و نیز دارای توابع ریاضی پایه‌ای مانند ماتریسها و عملیات ماتریسی است، استفاده خواهد شد.

با توجه به پیشرفت روزافزون بهره‌گیری از رایانه، روشهای نیوتن-رافسون و نظریه خطی، به دلیل دارا بودن تعداد تکرار عملیات محاسباتی کمتر و سرعت همگرایی بالاتر، مورد توجه قرار گرفته‌اند (وود و چارلز، ۱۹۷۲)؛ با این وجود، مشکلات همگرایی حل مسأله گاهی در تحلیل این شبکه‌های مشکل‌ساز است. همچنین، استفاده از این روشها باعث ایجاد تقریب در حل معادله‌ها می‌گردد (نورانی و همکاران، ۱۳۸۸).

امروزه یکی از بهترین روشهای تکرار که در حل دستگاههای غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش بهبود یافته‌ی نیوتن-رافسون، موسوم به شیب^۱ است. در این روش به جای اصلاح مداوم بده (Q) و فشار (H)، این مقادیر بطور مستقیم در روندی تکراری محاسبه می‌شوند. این محاسبات تا هنگامی که جوابهای نهایی به صورت ثابت ظاهر گردیده، و اختلافی بین آنها مشاهده نشود، ادامه یافته و نتایج بطور همزمان ارائه می‌شوند. همچنین، این روش برای شروع محاسبات، مانند روش نظریه خطی نیازی به رعایت شرط پیوستگی بده در گرهمها ندارد (تودینی و پیلاتی، ۱۹۸۷ A). این روش معادلات کارمایه در هر لوله را با ترکیب معادلات پیوستگی در هر نقطه‌ی اتصال، به منظور حل همزمان معادلات افت گره و بده‌ی لوله‌ها نوشته، سپس به حل همزمان روابط هیدرولیکی حاکم بر شبکه با بهره‌گیری از جبر ماتریسها (توابع بازگشتی متشکل از ماتریس ضرایب اصلی) و خطی نمودن رابطه‌ی غیرخطی کارمایه با استفاده از بسط گروه تیلور^۲، می‌پردازد (احمد، ۱۹۹۷).

عارفخانی و همکاران (۱۳۸۸) به مقایسه‌ی عملکرد روش نیوتن-رافسون و شیب در تحلیل مبتنی بر فشار *HDA* پرداختند. بر اساس این تحلیل، توانایی روش شیب علاوه بر شبیه‌های مبتنی بر تقاضا *DDA* در شبیه‌های *HDA* نیز به اثبات رسید. رضویان و همکاران (۱۳۹۱ الف) بر اساس الگوریتم ژنتیک به تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی توزیع آب اقدام نمودند. نتایج این تحقیق نشان دادند که روش شیب پس از الگوریتم ژنتیک

^۱ - Gradient method

^۲ - Taylor series

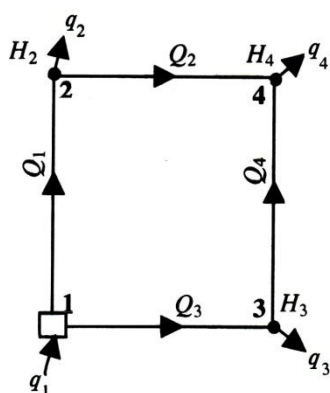
در معادله‌ی ۴، $Q(x)$ مقدار بده جریان یافته در لوله و Q_i مقدار بدهی جریان ورودی یا خروجی در گره برحسب متر مکعب بر ثانیه می‌باشند (منزوی، ۱۳۸۳).

رابطه‌ی افت فشار در حلقه

در هر حلقه از یک شبکه جمع جبری افت فشارهای لوله‌های تشکیل دهنده‌ی آن باید برابر با صفر شود؛ بنابراین:

$$\sum \Delta H = 0 \quad (۵)$$

که در آن $\sum \Delta H$ معرف جمع افت بار آبی تمام لوله‌هایی است که حلقه را تشکیل می‌دهند (منزوی، ۱۳۸۳).



شکل ۱- نمای طرح‌واره‌ای از یک شبکه‌ی توزیع آب. قیود طراحی شبکه‌هایی توزیع آب

- محدودیت سرعت:

بیشترین سرعت در لوله‌های شبکه‌ی توزیع آب نباید از حدودی بیشتر گردد، زیرا زیاد شدن سرعت از یک سو سبب افزایش افت فشار، و در نتیجه گران شدن تأسیسات ایجاد فشار در شبکه می‌گردد. همچنین احتمال شکسته شدن لوله‌ها را بویژه در مکان پیوند آنها بر اثر پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ^۳ افزایش می‌بخشد. کمترین سرعت آب در لوله‌های شبکه‌ی توزیع آب بدین جهت به‌عنوان یک قید در نظر گرفته می‌شود که در سرعت‌های پایین رسوب بیشتری در لوله‌ها تشکیل گردیده، که این امر باعث کاهش بازدهی سامانه می‌گردد (منزوی، ۱۳۸۳). بیشترین سرعت در شبکه‌ی توزیع آب شهری ۲ متر بر ثانیه، و کمترین سرعت مجاز، ۰/۳ متر بر ثانیه در نظر گرفته می‌شود (حمیدخانی، ۱۳۷۵).

روابط هیدرولیکی بین فرانسجه‌ها

مهمترین روابط هیدرولیکی که برای تحلیل جریان در شبکه‌ی توزیع آب به کار می‌روند عبارتند از:

رابطه‌ی افت بار آبی لوله:

$$\Delta H = H_i - H_j = R(x)Q^n(x) \quad (۱)$$

در معادله‌ی (۱)، ΔH افت بار آبی در لوله بر حسب متر، H_i و H_j به ترتیب مقادیر کارمایه کل در گره‌های بالادست و پایین‌دست بر حسب متر، $Q(x)$ بدهی لوله بر حسب متر مکعب بر ثانیه، $R(x)$ ثابت مقاومت لوله و N توان است.

در این معادله، به منظور محاسبه‌ی ثابت مقاومت لوله $R(x)$ ، از رابطه‌ی دارسی ویسباخ^۱، (معادله‌ی ۲) و یا از هیزن ویلیامز^۲ (معادله‌ی ۳) بهره برده می‌شود. بر اساس رابطه‌ی انتخابی $R(x)$ ، مقدار نمای N در معادله‌ی (۱) به ترتیب برابر با ۲ و ۱/۸۵۲ خواهد بود (منزوی، ۱۳۸۳).

در اکثر حالات یک رابطه‌ی غیرخطی بین $Q(x)$ و H برقرار است. همچنین، در تحلیل شبکه‌ی توزیع آب معمولاً از افت فشارهای موضعی چشم‌پوشی می‌شود (تائی و چمنی، ۱۳۸۴).

$$\Delta H = R(x)Q^n(x) = \frac{fL}{12VD^5} Q^n(x) \quad (۲)$$

$$\Delta H = R(x)Q^{1/852}(x) = \frac{10.67L}{C^{1/852} D^{4/852}} Q^{1/852}(x) \quad (۳)$$

در معادله‌های ۲ و ۳، L طول لوله بر حسب متر، D قطر آن بر حسب متر، F ضریب اصطکاک و C ضریب هیزن است (پازوش، ۱۳۸۵).

روابط پیوستگی جریان در گرهمها

معادله‌های پیوستگی جریان بر این اصل استوارند که بدهی ورودی به یک گره باید با بدهی خروجی آن برابر باشد. پس، برای جریان تراکم ناپذیر ماندگار در شبکه، جمع جبری جریانهای ورودی و خروجی از هر گره باید برابر با صفر شود.

$$\sum (Q(x) + q_i) = 0 \quad (۴)$$

^۳ - water hammer

^۱ - Darcy-Weisbach formula

^۲ - Hazen-Williams formula

ماتریس (A): ماتریسی قطری است که عنصر روی قطر اصلی آن مقدار $Q(x) | Q(x) |^{(n-1)}$ می‌باشد. که مقادیر این ماتریس در هر تکرار به علت تغییر یافتن مقدار بده اصلاح می‌شود.

ماتریس مقادیر بده‌ی لوله‌ها (Q): این ماتریس معرف مقادیر بده‌ی جریان یافته در لوله‌های شبکه توزیع آب است.

ماتریس اتصال (C): این ماتریس ارتباط هر گره را با گره‌های دیگر نشان داده و در هر سطر تنها دارای دو عنصر غیر صفر است. در هر سطر عدد ۱- نشان‌دهنده‌ی گره‌ی است که لوله از آن گره آغاز گردیده و عدد ۱ معرف گره‌ی است که لوله به آن پایان می‌یابد.

ماتریس گره با بار آبی مجهول (H): این ماتریس معرف مقدار ارتفاع فشاری گره‌هایی با بار آبی مجهول است.

ماتریس اتصال گره با بار آبی ثابت (H_{cte}): در این ماتریس لوله‌هایی که از این گره آغاز می‌گردند، با عدد ۱- معرفی می‌شوند و مابقی عناصر صفر می‌باشند.

ماتریس گره با بار آبی ثابت (H_0): این ماتریس معرف مقدار ارتفاع فشاری گره‌های با بار آبی ثابت است.

همچنین، رابطه‌ی پیوستگی در گره‌ها در شکل ماتریسی بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$C_C Q = q \quad (10)$$

ماتریس اتصال (C_C): ترانزاده‌ی ماتریس (C) می‌باشد که در انجام محاسبات به کار می‌رود.

ماتریس اتصال (Q): این ماتریس معرف اندازه‌ی بده‌ی مورد نیاز یا مصرفی در هر یک از گره‌هاست.

$$\begin{bmatrix} NA & C \\ C_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{cte} H_0 \\ q \end{bmatrix} \quad (11)$$

با توجه به ماتریس غیرخطی A، معادله‌ی (۱۱) به یک ماتریس غیرخطی تبدیل می‌شود، که حل آن نیازمند به استفاده از روش‌های تکرار است. روش شیب با استفاده از بسط معادلات در گروه تیلور به حل معادلات فوق می‌پردازد. با استفاده از جبر ماتریسها و حل معادلات ماتریس فوق، معادلات ارتفاع فشاری گره‌های مجهول، و بده‌های جریان یافته در لوله‌های شبکه، به صورت زیر در می‌آیند (تودینی و پیلاتی، ۱۹۸۷B).

- محدودیت فشار:

بیشترین فشار در شبکه باید به اندازه‌ای باشد که لوله‌ها بتوانند آن را مخصوصاً در محل پیوندها، تحمل کنند. کمترین فشار آب در شبکه باید به اندازه‌ای باشد که در ابتدای هر انشعاب فشار لازم برای مصرف کننده وجود داشته باشد (منزوی، ۱۳۸۳).

تشکیل شکل ماتریسی روش شیب

به منظور حل جریان در شبکه‌های توزیع آب با استفاده از روش شیب ابتدا باید ماتریسهای مورد نیاز را تشکیل داد، سپس با بهره‌گیری از آنها به حل شبکه مورد نظر اقدام نمود. بار آبی گره‌های مصرف غالباً مجهول بوده و از تحلیل شبکه به دست می‌آید، در صورتی که بار آبی گره‌های ورودی معمولاً معلوم بوده و در تحلیل پایایی ثابت است. مخزن مرتفع، به عنوان گره‌ی ورودی به شبکه در نظر گرفته می‌شود، که بار آبی آن برابر با بار آبی سطح آب در مخزن است (تائبی و چمنی، ۱۳۸۴). ماتریسها و بردارهای مورد نیاز به همراه معادلات و انگاره‌ی حاکم در این روش به صورت خلاصه در زیر معرفی می‌گردند:

$$H_i = H_j + \Delta H_{ij} \Rightarrow \quad (6)$$

$$H_i = H_j + R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x) \quad (6)$$

$$H_i + n R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x) =$$

$$H_j + n R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x) + R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x) \quad (7)$$

$$H_j + n R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x) = \quad (8)$$

$$H_i + (n-1) R(x) |Q(x)|^{(n-1)} Q(x)$$

با نوشتن معادلات افت فشار در تمامی لوله‌ها به شکل بالا، و همچنین معادلات پیوستگی در تمام گره‌ها، ضرایب هر یک از متغیرهای Q و H این روابط در یک ماتریس نوشته می‌شوند. این ماتریس خود به ماتریسهای کوچکتری که در زیر آمده‌اند تقسیم می‌گردد. تمامی روابط مورد نیاز به شکل ماتریسی در زیر آمده‌اند. افت بار آبی در هر لوله بین دو گره‌ی مشخص از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AQ + CH = -H_{cte} H_0 \quad (9)$$

و مشاهداتی با هم برابر باشند. در حالت آرمانی، مقدار این شاخصها به ترتیب $CRM=0$ ، $R^2=1$ و $RMSE=0$ خواهند بود (وایت مور، ۱۹۹۱؛ لوگیو و گرین، ۱۹۹۱؛ سانتی و همکاران ۲۰۰۱).

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{sm} - Q_{GM})_i^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{sm,i} - \bar{Q}_{sm})^2} \quad (14)$$

$$CRM = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{GM,i} - \sum_{i=1}^n Q_{sm,i}}{\sum_{i=1}^n Q_{GM,i}} \quad (15)$$

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Q_{sm,i} - \bar{Q}_{sm})(Q_{GM,i} - \bar{Q}_{GM}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{sm,i} - \bar{Q}_{sm})^2 \sum_{i=1}^n (Q_{GM,i} - \bar{Q}_{GM})^2} \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [Q_{GM} - Q_{sm}]^2}{n}} \quad (17)$$

در این روابط Q_{sm} مقادیر محاسبه شده بده با سایر روشها \bar{Q}_{sm} متوسط مقادیر محاسبه شده بده با سایر روشها، و Q_{GM} مقادیر بدهی محاسباتی با شکل ماتریسی شیب به وسیله نرم افزار MATLAB، و \bar{Q}_{GM} متوسط مقادیر محاسبه شده بده با شکل ماتریسی شیب به وسیله نرم افزار MATLAB و n تعداد کل داده‌ها می‌باشد.

حل یک مسأله با استفاده از شکل ماتریسی روش

شیب

در شبکه‌ی توزیع آب مطابق شکل ۲، ارتفاع فشاری گرهای (۱) و (۲) به ترتیب برابر با ۱۰۰ و ۹۵ متر آب می‌باشد. مشخصات شبکه شامل: طول لوله‌ها، قطر لوله‌ها و ضریب اصطکاک آنها در جدول (۱) آورده شده‌اند.

$$H_{i+1} = - (C_C (N A)^{-1} C^{-1} (C_C (N A)^{-1} (A Q_i + H_{cte} H_0) - (C_C Q_i - q)) \quad (12)$$

$$Q_{i+1} = (I - N^{-1}) Q_i - (N^{-1} A^{-1} (C_C H_{i+1} + H_{cte} H_0)) \quad (13)$$

الگوریتم حل

- i. ابتدا حدس اولیه‌ای برای بدهی لوله‌های شبکه فرض می‌شود.
- ii. معادله‌ی (۱۲) بر اساس مقادیر فوق حل می‌گردد.
- iii. معادله‌ی (۱۳) طبق حدس اولیه و جوابهای به دست آمده از معادله‌ی (۱۲) حل می‌شود.
- iv. نتایج حاصل از حل معادله‌ی (۱۳) جایگزین مقادیر گام اول می‌گردد.
- v. گام دوم براساس مقادیر جایگزین شده مجدداً حل می‌شود.
- vi. این مراحل تا زمانی تکرار می‌گردند که جواب معادلات (۱۲) و (۱۳) نهایتاً بصورت ثابت و بدون تغییر ظاهر شوند.

شاخص‌های آماری

شاخص‌های پرکاربرد که به منظور ارزیابی نتایج حاصل از محاسبات و مقایسه آن با سایر روشها بکار می‌روند، شامل: NS^1 ، CRM^2 ، R^2 و $RMSE^4$ می‌باشند. شاخص نش- ساتکلیف، یا به اختصار NS ، اختلاف نسبی مقادیر را نشان می‌دهد. مقدار این شاخص از منفی بی‌نهایت تا یک متغیر است؛ عدد یک بیانگر انطباق کامل بین نتایج و سایر روشها می‌باشد و هر چه عدد کوچکتر شود، اختلاف بیشتر بین نتایج را نشان می‌دهد (نش و ساتکلیف، ۱۹۷۰). شاخصهای آماری دیگر، ضریب مجموع باقی‌مانده CRM و ضریب تعیین R^2 و ریشه‌ی دوم میانگین مربع خطاها $RMSE$ می‌باشند. CRM اندازه‌گیری شیب به سمت تخمین اندازه‌گیری بیش از حد یا کمتر از حد است. CRM مثبت نشانگر گرایش به سمت تخمین بیش از حد است، در شرایطی که مقدار محاسباتی

¹ - Nash-Sutcliffe

² - coefficient of residual mass

³ - coefficient of determination

⁴ - root mean square deviation

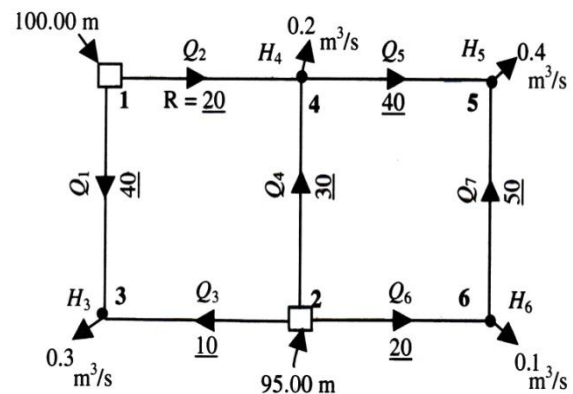
$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [H_{cte}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[H.] = \begin{bmatrix} 100 \\ 95 \end{bmatrix} \quad [q] = \begin{bmatrix} 0/3 \\ 0/2 \\ 0/4 \\ 0/1 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} 0/5 \\ 0/5 \\ 0/5 \\ 0/5 \\ 0/5 \\ 0/5 \\ 0/5 \end{bmatrix}$$

نتایج و بحث

نتایج حل مسأله شامل مقادیر بده در هر لوله و ارتفاع فشاری در گرهای مجهول شبکه، به ترتیب در جدولهای (۲) و (۳) ارائه شده‌اند. چگونگی عملکرد روش شیب در این جدولها به خوبی مشاهده می‌شود. اصلاح مداوم مقادیر بده و بار آبی که به صورت همزمان انجام می‌پذیرد، امکان دستیابی سریعتر را به جوابهای نهایی نسبت به سایر روشها امکان پذیر می‌نماید. نتایج بیانگر قابلیت‌های این روش، از جمله سرعت و دقت بسیار بالای آن جهت تحلیل شبکه‌هایی با وسعت زیاد می‌باشد.

در جدول (۴)، مقادیر محاسبه شده‌ی سرعت جریان در لوله‌ها با توجه به بده و سطح مقطع برای شبکه و افت بار آبی در هر یک از لوله‌ها آورده شده‌اند. همچنین، به منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج بده و بار آبی محاسباتی روش شیب، با حل عددی مسأله طبق روشهای هاردی کراس، نیوتن-رافسون و نظریه‌ی خطی، به ترتیب در جدولهای شماره‌ی (۵) و (۶) ارائه شده‌اند. علامت منفی در محاسبات بده‌ی لوله‌ها نشان می‌دهد که به هنگام توزیع آب در شبکه، جهت جریان برخلاف جهت نمایش داده شده در شکل (۲) خواهد بود.



شکل ۲- مشخصات هندسی و هیدرولیکی شبکه‌ی توزیع آب.

جدول ۱- مشخصات شبکه‌ی توزیع آب.

شماره لوله	طول لوله (متر)	قطر لوله (متر)	ضریب اصطکاک
۱	۳۰۰	۰/۵	۰/۰۵۰۵
۲	۲۵۰	۰/۶	۰/۰۷۵۰
۳	۲۵۰	۰/۳	۰/۰۰۱۱
۴	۳۰۰	۰/۳	۰/۰۰۲۹
۵	۲۵۰	۰/۵	۰/۰۶۰۵
۶	۲۵۰	۰/۵	۰/۰۳۰۲
۷	۳۰۰	۰/۴	۰/۰۲۰۷

ابتدا، مطابق با جهت نشان داده شده در شکل (۲)، برای تمام لوله‌های شبکه مقادیر بده‌ی جریان یافته‌ی اولیه برابر با ۰/۵ متر مکعب بر ثانیه فرض می‌شود. با تعیین تعداد لوله‌ها، تعداد گرهای با ارتفاع فشاری مجهول و تعداد گرهای با ارتفاع فشاری ثابت در شبکه‌ی توزیع آب، ماتریسهای مورد نیاز مشخص می‌گردند. ماتریسهای اتصال (C)، بده‌ی لوله‌ها (Q)، بار آبی گرهای با ارتفاع ثابت (H₀) و بده‌ی مورد نیاز در گرهای (Q) و ماتریس اتصال گرهای با بار آبی ثابت (H_{cte}) به صورت زیر تشکیل می‌گردند؛ بطور مثال، در سطر دوم ماتریس اتصال (C)، با توجه به جهت جریان مشخص شده در شبکه روی شکل، لوله‌ی (۲) از گره (۱) آغاز و به گره (۴) ختم می‌گردد. بنابراین، مقدار گره‌ی آغازی عدد ۱- و گره پایانی عدد ۱ است، و چون این لوله با بقیه‌ی گرهای در ارتباط مستقیم نیست، مابقی درایه‌های این سطر دارای مقدار صفر می‌باشند.

جدول ۲- مقادیر بار آبی گرههای مجهول بر حسب متر در تکرارهای مختلف.

تکرار	۱	۱	۳	۴	۵	۶
شماره‌ی گره						
۳	۹۷/۳۱۵۵۰	۹۵/۰۰۵۴۳	۹۴/۹۹۰۰۰	۹۴/۹۹۰۱۵	۹۴/۹۹۰۱۶	۹۴/۹۹۰۱۶
۴	۹۸/۲۶۱۳۰	۹۵/۵۷۶۶۵	۹۴/۹۸۹۹۶	۹۴/۹۷۱۲۸	۹۴/۹۷۱۳۱	۹۴/۹۷۱۳۱
۵	۹۷/۸۹۸۴۷	۹۲/۲۸۶۲۷	۹۱/۹۴۱۶۷	۹۱/۹۲۴۶۳	۹۱/۹۲۴۶۵	۹۱/۹۲۴۶۵
۶	۹۴/۳۶۰۳۳	۹۳/۵۸۰۷۱	۹۳/۴۵۰۹۲	۹۳/۴۴۵۳۹	۹۳/۴۴۵۴۰	۹۳/۴۴۵۴۰

جدول ۳- مقادیر بده جریان در لوله‌های شبکه بر حسب مترمکعب بر ثانیه در تکرارهای مختلف.

تکرار	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شماره‌ی لوله						
۱	۰/۲۹۵۳۴	۰/۳۲۵۹۹	۰/۳۲۵۳۲	۰/۳۲۵۳۲	۰/۳۲۵۳۲	۰/۳۲۵۳۲
۲	۰/۳۱۴۶۳	۰/۴۶۳۸۶	۰/۴۷۳۲۶	۰/۴۷۴۱۴	۰/۴۷۴۱۴	۰/۴۷۴۱۴
۳	۰/۰۰۴۶۶	-۰/۰۲۵۹۹	-۰/۰۲۵۳۲	-۰/۰۲۵۳۲	-۰/۰۲۵۳۲	-۰/۰۲۵۳۲
۴	۰/۱۲۴۲۲	-۰/۰۰۳۹۶	-۰/۰۲۴۳۴	-۰/۰۲۵۵۱	-۰/۰۲۵۵۱	-۰/۰۲۵۵۱
۵	۰/۲۳۸۸۵	۰/۲۵۹۹۰	۰/۲۴۸۹۲	۰/۲۴۸۶۳	۰/۲۴۸۶۳	۰/۲۴۸۶۳
۶	۰/۲۶۱۱۵	۰/۲۴۰۱۰	۰/۲۵۱۰۸	۰/۲۵۱۳۷	۰/۲۵۱۳۷	۰/۲۵۱۳۷
۷	۰/۱۶۱۱۵	۰/۱۴۰۱۰	۰/۱۵۱۰۸	۰/۱۵۱۳۷	۰/۱۵۱۳۷	۰/۱۵۱۳۷

جدول ۴- نتایج حاصل از اجرای برنامه‌ی شیب در لوله‌های شبکه.

شماره لوله	بده (مترمکعب بر ثانیه)	سرعت (متر بر ثانیه)	افت بار آبی در لوله (متر)
۱	۰/۳۲۵۳۲	۱/۵۶۷	۵/۰۰۹
۲	۰/۴۷۴۱۴	۱/۶۷۷	۵/۰۲۸۶
۳	۰/۰۲۵۳۲	۰/۳۵۸	۰/۰۰۹۸
۴	۰/۰۲۵۵۱	۰/۳۶۱	۰/۰۲۸
۵	۰/۲۴۸۶۳	۱/۲۶۶	۳/۰۴۶
۶	۰/۲۵۱۳۷	۱/۲۸۰	۱/۵۵۴
۷	۰/۱۵۱۳۷	۱/۲۰۵	۱/۵۲۰

با معادله‌ی (۱)، افت بار آبی در هر یک از لوله‌ها محاسبه، و براساس معادله‌ی (۵)، افت کارمایه در حلقه‌های شبکه‌ی توزیع آب برابر با صفر می‌گردد.

در جدول (۴) اعداد محاسبه شده‌ی سرعت جریان در لوله‌ها با توجه به بده و سطح مقطع در محدوده‌ی مجاز سرعت برای شبکه‌ی توزیع آب قرار دارند. همچنین مطابق

جدول ۵- مقادیر بده‌ی جریان در لوله‌های شبکه بر حسب مترمکعب بر ثانیه.

شماره‌ی لوله	هاردی کراس	نیوتن-رافسون	نظریه‌ی خطی	شیب
۱	۰/۳۲۴۶	۰/۳۲۴۶	۰/۳۶۳۱	۰/۳۲۵۳
۲	۰/۴۷۱۵	۰/۴۷۱۴	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۴۱
۳	۰/۰۲۴۶	۰/۰۲۴۶	۰/۰۶۳۱	-۰/۰۲۵۳
۴	-۰/۰۲۱۹	-۰/۰۲۱۷	-۰/۰۲۶۱	-۰/۰۲۵۵
۵	۰/۲۴۹۶	۰/۲۴۹۶	۰/۲۵۳۲	۰/۲۴۸۶
۶	۰/۲۵۰۳	۰/۲۵۰۴	۰/۲۴۶۸	۰/۲۵۱۳
۷	۰/۱۵۰۴	۰/۱۵۰۴	۰/۱۴۶۸	۰/۱۵۱۳

به یک گره باید با بدهی خروجی آن برابر باشد. بر اساس نتایج روش شیب در شبکه‌ی توزیع آب، جمع جبری جریانهای ورودی و خروجی از هر گره برابر با صفر می‌گردد.

در جدول (۵) علامت منفی در محاسبات بدهی لوله‌ها نشان می‌دهد که به هنگام توزیع آب در شبکه، جهت جریان برخلاف جهت نمایش داده شده در شکل (۲) خواهد بود. براساس معادله‌ی پیوستگی (۴)، جریان ورودی

جدول ۶- مقادیر بار آبی گره‌های مجهول بر حسب متر.

شماره‌ی گره	هاردی کراس	نیوتن-رافسون	نظریه‌ی خطی	شیب
۳	۹۵/۰۱۰	۹۵/۰۱۰۵	۹۵/۰۶۰۲	۹۴/۹۹۰۰
۴	۹۵/۰۲۵	۹۵/۰۲۵۲	۹۴/۹۶۴۶	۹۴/۹۷۱۳
۵	۹۱/۹۵۶	۹۱/۹۵۵۳	۹۱/۸۱۳۵	۹۱/۹۲۴۶
۶	۹۳/۴۵۹	۹۳/۴۵۷۱	۹۳/۴۹۷۳	۹۳/۴۴۵۳

را تشکیل می‌دهند، برابر با صفر بوده و افت کارمیه در حلقه‌های شبکه‌ی توزیع آب همانند سایر روشها برابر با صفر می‌گردد.

همان طور که بیان شد، در هر حلقه از یک شبکه، جمع جبری افت فشار انتهایی لوله‌های تشکیل دهنده‌ی آن باید برابر صفر شود. براساس معادله‌ی (۵)، در جدول (۶) در روش شیب جمع افت بار آبی تمام لوله‌هایی که هر حلقه

جدول ۷- مقایسه بدهی روش شیب بر اساس شاخصهای آماری.

هاردی کراس	نیوتن-رافسون	نظریه‌ی خطی	شاخص
۰/۹۸۵۷	۰/۹۸۵۷	۰/۹۴۸۱	NS
-۰/۰۳۵۲	-۰/۰۳۵۳	-۰/۰۹۰۲	CRM
۰/۹۹۲۳	۰/۹۹۲۴	۰/۹۶۵۸	R^2
۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۳	RMSE

جدول ۸- مقایسه‌ی بار آبی روش شیب بر اساس شاخصهای آماری.

هاردی کراس	نیوتن-رافسون	نظریه‌ی خطی	شاخص
۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۴	NS
-۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۰	CRM
۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۵	R^2
۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۳۳	RMSE

بدهی محاسباتی روش شیب همبستگی بالایی با سایر روشها دارد. در مورد ارزیابی بدهی شیب با شاخص $RMSE$ ، با توجه به نزدیک بودن نتایج به عدد صفر، می‌توان پایین بودن خطای محاسباتی را بیان نمود. همچنین، نتایج شاخص CRM در جدول (۷) نشان دهنده‌ی مطلوب بودن برآورد بدهی با روش شیب است. از شاخص NS با توجه به نزدیکی اعداد به دست آمده به عدد یک می‌توان، تطابق بالای نتایج گرفته شده از روش شیب

به منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج بدهی روش شیب، با حل عددی مسأله طبق روشهای تکرار شامل: هاردی-کراس، نیوتن-رافسون و نظریه‌ی خطی از شاخصهای NS ، CRM ، R^2 و $RMSE$ بهره بردیم. بیان شد که در حالت آرمانی، مقادیر این شاخصها به ترتیب برابر با $NS=1$ ، $CRM=0$ ، $R^2=1$ و $RMSE=0$ خواهند بود. با توجه به مقادیر شاخص R^2 در جدول (۷)،

پیچیده، اصلاح ماتریس مذکور در هر تکرار و زمانبری عملیات معکوس‌سازی ماتریس ژاکوبین همچنان برقرار بود. روش نظریه خطی هم در مقایسه با روش نیوتن-رافسون همگرایی کندتری داشت (موسویان و جعفرزاده، ۲۰۱۴).

در جدولهای (۵) و (۶) نزدیک بودن نتایج بده و بار آبی روش شیب، نشان‌دهنده تطابق بسیار بالای روش شیب با سه روش دیگر است. همچنین، از نزدیک بودن شاخصهای آماری به مقادیر آرمانی آنها: $NS=I$ ، $CRM=0$ ، $R^2=1$ و $RMSE=0$ می‌توان کارایی روش شیب را در محاسبه بار آبی گرهای مجهول، و نیز بده عبوری از لوله‌ها به خوبی دریافت. به‌رغم مشاهده دقت یکسان در این روشها باید متذکر شد که در روشهای تکراری، با توجه افزایش حجم محاسبات در شبکه‌هایی گسترده، سرعت دستیابی به نتایج کند و نامطمئن خواهد بود؛ با این وجود، در شکل ماتریسی روش شیب به علت محاسبه مستقیم مقادیر بده و بار آبی، که به صورت همزمان انجام می‌پذیرد، تعداد محاسبات کاهش می‌یابد. همگرایی سریعتر و خطای کمتر مزیت اصلی این روش تحلیل شبکه‌هایی گسترده خواهد بود، ضمن آنکه مهم‌ترین محدودیت آن این است که مانند روشهای نیوتن-رافسون و نظریه خطی، محاسبات ماتریسی آن با دست قابل انجام نیست و نیاز به برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزاری دارد.

منابع

۱. بابازاده، ح.، و. م. ر. بهشتی. ۱۳۸۹. طراحی شبکه‌هایی تأمین آب. انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران. ۴۸۴ صفحه.
۲. پازوش، ۱۳۸۵. مکانیک سیالات و هیدرولیک مهندسی. انتشارات دانشگاه تهران. ۶۷۲ صفحه.
۳. تائبی، ا.، و م. ر. چمنی. ۱۳۸۴. شبکه‌های توزیع آب شهری. دانشگاه صنعتی اصفهان. ۶۰۰ صفحه.
۴. حمیدخانی، ع. ۱۳۷۵. طراحی شبکه‌های آبرسانی *LOOP* انتشارات کتاب دانشگاهی. ۱۶۰ صفحه.
۵. رضویان، س.، ع. بختیاری‌فر، س. م. نبوی همدانی، و م. حیدری. ۱۳۹۱ الف. تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های توزیع آب بر اساس الگوریتم ژنتیک و مقایسه آن با سایر

با سه روش دیگر را استنتاج نمود. بر اساس نتایج این شاخصها می‌توان شکل ماتریسی روش شیب را دارای دقت بالایی در محاسبه بده بیان کرد.

همچنین، در جدول (۸) نتایج بار آبی روش شیب با روشهای تکراری دیگر با استفاده از شاخصهای معرفی گردیده، ارائه شده‌اند. از شاخص NS با توجه به نزدیکی اعداد به دست آمده به عدد یک، تطابق بالای نتایج گرفته شده از روش شیب با سه روش دیگر را می‌توان استنتاج نمود. همچنین، نتایج شاخص CRM در جدول (۸) نشان دهنده مطلوب بودن برآورد بار آبی با کاربرد روش شیب است. با توجه به مقادیر شاخص R^2 جدول (۸) بار آبی محاسباتی، روش شیب همبستگی را بالایی با سایر روشها دارد. در مورد ارزیابی بار آبی شیب با شاخص $RMSE$ ، با توجه به نزدیک بودن نتایج به عدد صفر می‌توان پایین بودن خطای محاسباتی را عنوان نمود. نتایج این جدول کارایی روش شیب را در محاسبه بار آبی گرهای مجهول به خوبی نمایان می‌سازد، زیرا شاخصها به مقادیر آرمانی خود بسیار نزدیک می‌باشند.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق بطور موفقیت‌آمیزی از روش شیب در محیط برنامه‌نویسی MATLAB برای تحلیل هیدرولیکی شبکه توزیع آب استفاده شد. روش شیب، با توجه به عدم نیاز به رعایت اصل پیوستگی جریان در حدس اولیه گرهای شبکه، موجب می‌گردد که با تعداد محاسبات کمتر و همگرایی سریعتر نسبت به سایر روشهای تکرار بتوان به اهداف مورد نظر دست یافت. البته خاطر نشان می‌گردد که حجم و زمان مورد نیاز برای محاسبات به مقادیر حدس اولیه فراسنجهای فوق بستگی دارد. هاردی کراس روشی را مبنای معادلات بده در لوله‌ها ارائه کرد، اما همگرایی این روش با بزرگ شدن شبکه بسیار کند بوده و در برخی موارد واگرا می‌باشد؛ به علاوه، سرعت همگرایی به مقدار حدس اولیه بده لوله‌ها بستگی پیدا می‌کرد (موسویان و همکاران، ۱۳۹۱). روش نیوتن-رافسون تا حدودی مشخصه‌های همگرایی را بهبود بخشید ولیکن ایرادهای کلی روش نیوتن-رافسون، از قبیل وابستگی روند همگرایی به حدس اولیه، دشوار بودن محاسبه ماتریس ژاکوبین در شبکه‌هایی بزرگ و

- models: PART 1. A discussion of principles. J. Hydrol.10: 282-290.
17. Santhi, C., J.G. Arnold, J. R. Williams, W. A. Dugas, R. Srinivasan, and L. Hauck. 2001. Validation of the SWAT model on a large river basin with point and nonpoint sources. J. Am. Water Resour. Assoc. 37: 1169-1188.
 18. Todini, E, and S. Pillati. 1987 a. A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. Computer Applications in Water Supply, Research Studies Press Ltd., Taunton, UK., 1- 20.
 19. Todini, E., and S. Pillati. 1987 b. A gradient method for the analysis of pipe networks. Int. Conf. on Compu. Appl. Water Supply and Distribution. Leicester Polytechnic, UK. 1:1-20.
 20. Whitmore, A. P. 1991. A method for assessing goodness of computer simulations of soil processes. J. Soil Sci. 42:289-299.
 21. Wood, D. J, and C. O. A. Charles. 1972. Hydraulic network analysis using linear theory, J. Hydr. Eng. Div. ASCE. 98:1157-1170.
- روشهای مرسوم. همایش ملی عمران و توسعه پایدار. مشبار آبی.
۶. رضویان، س.، س.م. نبوی همدانی، و م. حیدری. ۱۳۹۱. مقایسه‌ی روش شیب و الگوریتم فرا ابتکاری تبرید تدریجی در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌هایی توزیع آب شهری. همایش ملی عمران و توسعه پایدار. مشبار آبی.
 ۷. عارفخانی، و.، م. تابش، و ح. توکلی فر. ۱۳۸۸. تحلیل هیدرولیکی مبتنی بر فشار شبکه‌هایی آبرسانی با استفاده از الگوریتم شیب. هشتمین کنگره بین المللی مهندسی عمران. دانشگاه شیراز.
 ۸. موسویان، ن.، م. ر. جعفرزاده، و ب. مدرس احمدی. ۱۳۹۱. کاربرد روش چند شبکه‌ای برای حل گروهع دستگامعادلات خطی در تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها. یازدهمین کنفرانس هیدرولیک ایران. دانشگاه ارومیه.
 ۹. منزوی، م.ت. ۱۳۸۳. آبرسانی شهری. انتشارات دانشگاه تهران. ۳۷۷ صفحه.
 ۱۰. نورانی، و.، م.ت. اعلمی، و الف. ذوالنون. ۱۳۸۸. بهینه‌سازی طراحی شبکه‌هایی توزیع آب با استفاده از الگوریتم ژنتیک (مطالعه‌ی موردی شهر سرعین)، سومین کنفرانس منابع آب ایران.
 11. Ahmed, I .1997. Application of the gradient method for the analysis of unsteady flow in water networks. University of Arizona, Tucson.
 12. Bhawe, P.R., and R. Gupta. 2006. Hardy Cross method. Analysis of water distribution networks. Alpha Science Int'l Ltd., 187-188.
 13. Lindell, E.2006. The History of water distribution network analysis: The computer age. 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, Cincinnati, Ohio, USA. p. 27-30.
 14. Loague, K, and R.E. Green.1991. Statistical and graphical methods for evaluating solute transport models: Overview and application. J. Contam.Hydrol.7:51-73.
 15. Moosavian, N. and M. R. Jaefarzadeh. 2014. Hydraulic analysis of water distribution network using shuffled complex evolution. J. Fluids. p.1-12.
 16. Nash, J. E., and J. V. Sutcliffe. 1970. River flow forecasting through conceptual

